Mécanique des fluides

Section de génie civil

TD 6 - Correction

Exercices

Exercice 1 Considérons un écoulement avec un débit Q, à travers une contraction. Les pressions à l'amont et à l'aval de la contraction sont mesurées à l'aide d'un manomètre (voir figure 1) contenant de l'huile de masse volumique $\rho_{huile} < \rho_{eau}$. Les sections amont et aval sont notées respectivement $A1$ et $A2$.

Déterminer la hauteur h donnée par le manomètre.

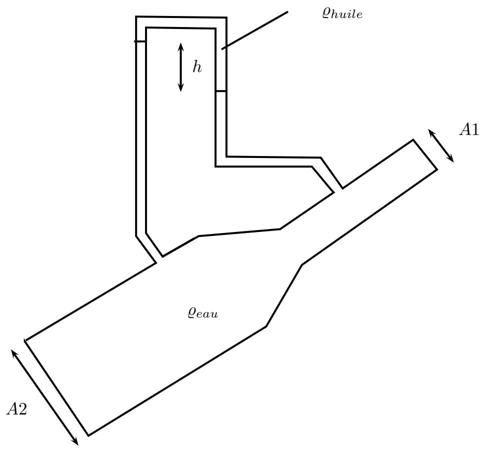

FIGURE 1 – Contraction dans une conduite.

Exercice 2 Le fond d'un récipient cylindrique, de rayon R et hauteur $2h$, est percé à la base d'un trou circulaire de rayon r. Initialement, le récipient est à moitié plein (voir figure 2).

1. Calculer le temps nécessaire pour le vider, en formulant les hypothèses convenables.

2. Supposons maintenant que la face supérieure du cylindre soit initialement fermée de façon hermétique. Que se passe-t-il lorsque le liquide s'écoule ? En particulier, pour quelle hauteur de fluide s'arrêtera-t-il de couler ?

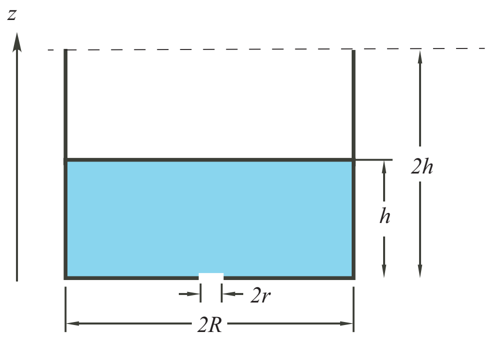

FIGURE 2 – Vidange d'un récipient.

Hypothèses :

— les dimensions vérifient $R \sim h \gg r$;

— l'eau s'écoule tant que la pression à l'orifice est plus grande que la pression atmosphérique p_0 ;

— l'air est un gaz parfait isotherme : $p(z)V(z) = cte$.

Application numérique : $h = 10$ cm, $R = 5$ cm, $r = 5$ mm, $\rho = 1$ g/cm^3, $p_0 = 10^5$ Pa.

Exercice 3 De l'eau circule dans un siphon immergé dans un réservoir (voir figure 3). Le niveau d'eau dans le réservoir est de 1,50 m. Le diamètre du tuyau est de 3 cm. Le tuyau monte à 1 m au-dessus du niveau d'eau. L'eau quitte le tuyau à la même cote que la base du réservoir.

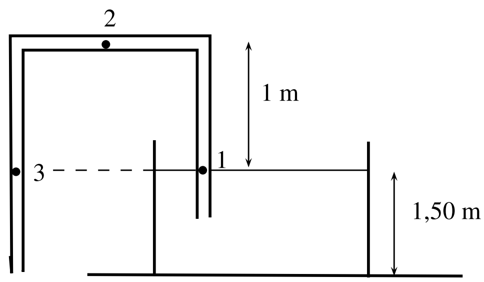

FIGURE 3 – Principe d'un siphon.

1. Calculer le débit à travers le siphon.
2. Calculer les pressions aux points 1, 2 et 3.

Exercice 4 L'Exposition Eau 2027 est déjà en préparation. Un architecte est invité à faire une création censée occuper un espace consacré au thème de l'eau. Il a fait un premier dessin d'une fontaine, alimentée par un grand réservoir relié à un siphon. La sortie du siphon est libre, formant un jet d'eau contre un déflecteur convexe. La trajectoire du jet est déviée vers un petit lac (voir figure 4). L'architecte prévoit un passage pour les piétons au-dessus du jet. Vous êtes l'ingénieur chargé de vérifier si l'effet désiré est réalisable. On néglige les pertes de charges par frottement (et donc les vitesses aux points 1 et 2 sont égales). Déterminer :

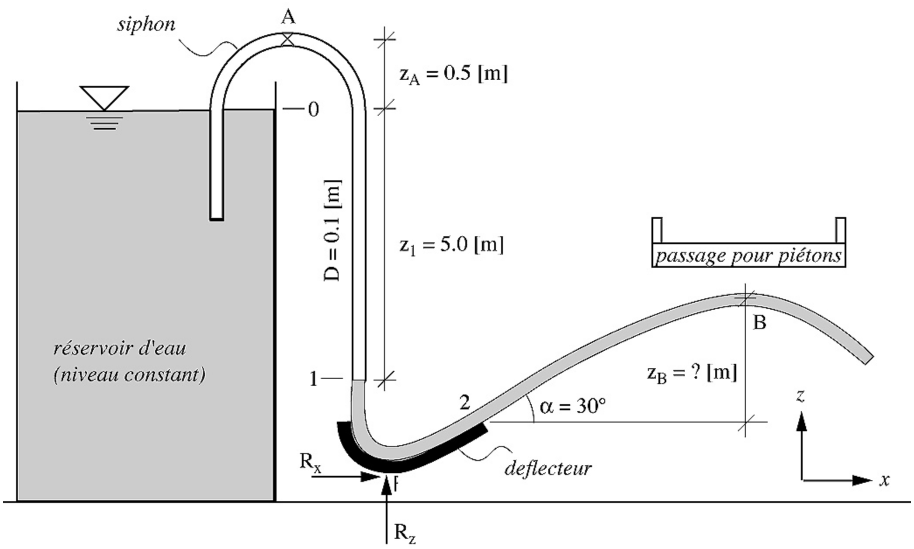

Figure 4 : schéma de principe.

1. le débit du siphon. Justifier vos hypothèses ;
2. le vecteur force au point de liaison entre la structure concave et la base (point F) ;
3. la hauteur z_B minimale pour le passage des piétons au-dessus du jet.

Exercice 5 Un tuyau d'arrosage fait 10 m de l'eau et son diamètre intérieur est 20 mm. Il sert à vider un bassin comme le montre la figure 5. Quel est le débit à travers le tube (on néglige les pertes de charge par frottement) ?

Exercice 6 Un véhicule est placé dans une soufflerie. L'air est injecté à la vitesse $u = 90$ km/h ; sa densité est $1,3\times10^{-3}$. Un manomètre à deux fluides (eau et huile) est utilisé ; la masse volumique est $\rho = 900$ kg m^{-3}. La hauteur d'huile est 2,5 cm.

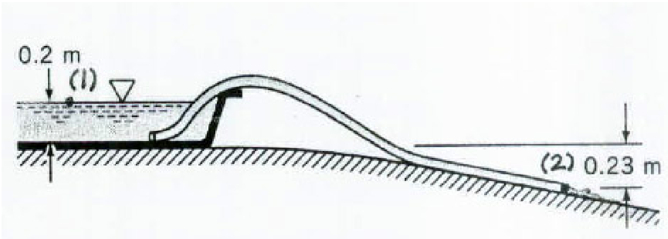

Figure 4 – Siphon d'un bassin.

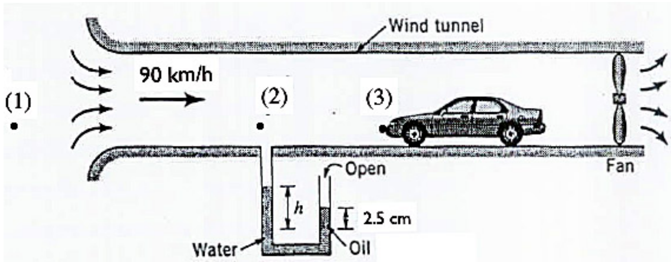

Figure 5 – Soufflerie.

1. déterminer la pression donnée par le manomètre (on donnera la hauteur d'eau h) ;
2. déterminer la différence de pression entre le front de la voiture (point 3 sur la figure 6) et la section test (point 2).

Corrections

Exercice 1 Considérons le point 1 juste au-dessous de l'extrémité du tube mince sur la droite et le point 2 juste au-dessous de la fin du tube mince sur la gauche. En servant du théorème de Bernoulli entre ces deux points, nous obtenons :

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2, \\ p_1 - p_2 &= \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1). \end{aligned} \tag{1}$$

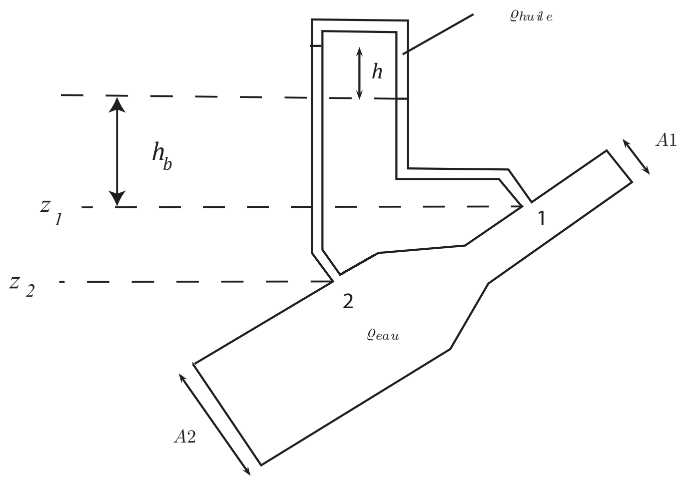

Figure 1 : application du théorème de Bernoulli entre 1 et 2.

Cela nous donne une solution pour la différence de pressions en fonction de la différence de vitesses. La position du manomètre résulte de la différence de pressions aux points 1 et 2. Maintenant, pour trouver h, nous utilisons une seconde équation qui lie h à la pression résultant des colonnes de liquide et d'huile dans le manomètre :

$$p_2 = \rho g h + \rho g h_b + \rho g \Delta z,$$

$$p_1 = \rho_h g h + \rho g h_b.$$

Ici on a $\Delta z = z_1 - z_2 > 0$ puisque l'axe z pointe vers le haut et h_b est la partie du manomètre entre z_1 et le fond de la colonne d'huile. La différence de pression est la suivante :

$$p_2 - p_1 = \rho g h - \rho_h g h + \rho g(z_1 - z_2). \tag{2}$$

Substituant (2) dans (1), puis utilisant $Q = v_i S_i$, nous trouvons :

$$himh = \frac{\rho}{2g(\rho - \rho_h)}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{\rho Q^2}{2g(\rho - \rho_h)}(S_1^{-2} - S_2^{-2}). \tag{3}$$

Exercice 2

1. Pour connaître le débit de l'eau à la sortie du réservoir lorsque la surface de l'eau est à l'altitude $z(t)$ par rapport au fond, on applique le théorème de Bernoulli entre le point S de la surface libre et l'ouverture O (voir figure 2) :

$$p_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s = p_o + \frac{1}{2}\rho v_o^2 + \rho g z_s,$$

soit après simplification

$$\rho g z = \frac{1}{2}\rho v_o^2 = \frac{1}{2}\rho\frac{Q^2}{(\pi r^2)^2},$$

avec Q le débit sortant, ρ la masse volumique de l'eau, et $z(t)$ la cote de S. On obtient l'expression du débit sortant en fonction de la hauteur d'eau :

$$Q = \pi r^2\sqrt{2gz} \tag{4}$$

C'est la formule de Torricelli vue en cours.

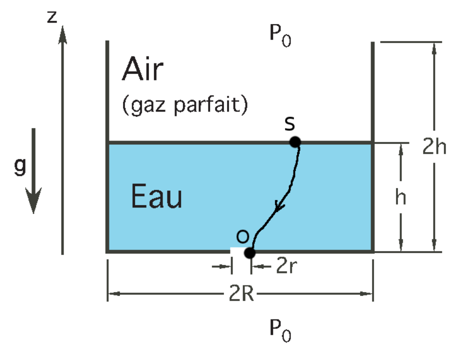

Figure 2 : application du théorème de Bernoulli entre S et O.

Le débit volumique descendant au niveau de le surface est égal au débit sortant par le trou (conservation de la masse) :

$$-\frac{dz}{dt}\pi R^2 = \pi r^2\sqrt{2gz(t)},$$

avec πR^2 la surface du cylindre et πr^2 la surface de l'orifice.
Cette équation différentielle du premier ordre s'intègre en séparant les variables :

$$\int_h^{z(t)} \frac{dz}{\sqrt{2gz}} = -\int_0^t \frac{r^2}{R^2}dt,$$

soit encore

$$\rightarrow t\frac{r^2}{R^2} = \frac{(\sqrt{h} - \sqrt{z(t)})\sqrt{2}}{\sqrt{g}}.$$

Au temps $t = T$, le reservoir est vide ($z(T) = 0$), et on déduit :

$$T = \frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 14,28 \text{ s.} \tag{5}$$

2. Soit p_g la pression du gaz et x sa hauteur : $x = 2h - z(t)$. Nous cherchons quand l'eau s'arrête de couler, donc la condition pour laquelle on a $v_o = 0$. Les pressions s'additionnent en O (loi de l'hydrostatique) :

$$p_o = \rho g(2h - x) + p_g.$$

La loi des gaz parfaits implique $p_g^i V_g^i = p_g^f V_g^f$ entre les instants initial et final, avec $V_g^i = \pi R^2 h$, $V_g^f = \pi R^2 x$. On a alors :

$$p_g^f = p_g^i \frac{h}{x} = p_0 \frac{h}{x},$$

donc :

$$p_o = \rho g(2h - x) + p_g^f = \rho g(2h - x) + p_0 \frac{h}{x}. \tag{6}$$

L'eau ne coule plus quand $p_0 = p_{atm}$. La résolution de l'équation du second ordre (6) donne deux solutions, dont une seule est positive : $x = 0,101$ m. L'eau coule donc de $x - h = 1$ mm avant de s'arrêter.

Exercice 3 Soit $h_1 = 1,50$ m, $h_2 = 1,0 + 1,5 = 2,50$ m, $p_{atm} = 0$ Pa, $\rho = 1000$ kg/m^3.

L'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B donne (voir figure 3) :

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 + \rho g z_a = p_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2 + \rho g z_b,$$

soit encore (sachant que $p_a = p_b = p_{atm}$)

$$\rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_b^2,$$

avec $v_b = Q/(\pi r^2)$. On déduit :

$$\rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho(Q/\pi r^2)^2, \tag{7}$$

ce qui nous permet de déterminer le débit :

$$Q = \pi r^2 \sqrt{2 g h_1} = 3,9 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}. \tag{8}$$

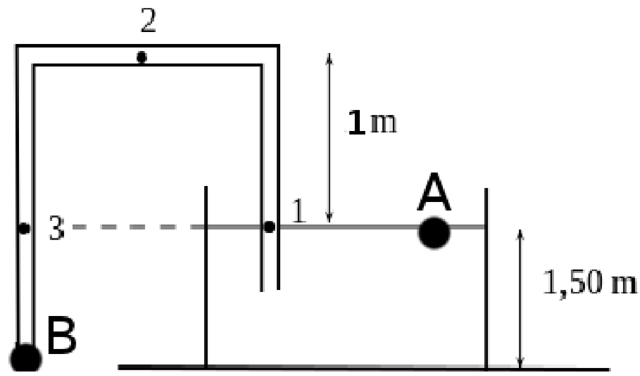

Figure 3 : application du théorème de Bernoulli.

Le débit est conservé tout au long du siphon car la masse se conserve. Comme la section est constante tout au long du siphon, la vitesse est la même en tout point du siphon, donc $v_1 = v_2 = v_3 = v_b$. De plus les points 1 et 3 se situent à la même altitude. On a donc $p_1 = p_3$. Appliquons le théorème de Bernoulli entre les points A et 1 afin d'obtenir p_1 :

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 + \rho g z_a = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1,$$

d'où

$$0 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1.$$

On a donc :

$$p_1 = -\frac{1}{2}\rho v_1^2 = -14,7 \text{ kPa}. \tag{9}$$

En utilisant $v_1 = Q/(\pi r^2) = 5,51$ m/s.

Appliquons le théorème de Bernoulli entre les points A et 2 :

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 + \rho g z_a = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2,$$

soit encore

$$\rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2,$$

et après simplification

$$p_2 = \rho g(h_1 - h_2) - \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Cela fait donc :

$$p_2 = -24,5 \text{ kPa}. \tag{10}$$

Exercice 4

1. On suppose le niveau du réservoir constant. On peut donc appliquer la formule de l'exercice 3 :

$$Q = \sqrt{2gz_1}\pi\frac{D^2}{4} = 0,0778 \text{ m}^3/\text{s}. \tag{11}$$

2. On applique le théorème de la conservation de la quantité de mouvement en régime permanent sur un volume de contrôle délimité par la surface S (voir figure 4) :

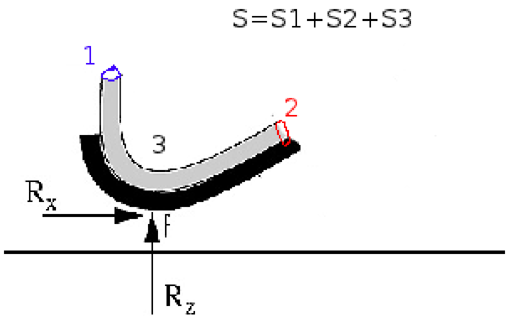

Figure 4 : volume de contrôle S.

$$\begin{aligned}\int_S \rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}\mathrm{d}S &= \sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{R},\\ &= \int_{S_1} \rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}\mathrm{d}S + \int_{S_2} \rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}\mathrm{d}S,\\ &= -\rho v_1\boldsymbol{v_1}S_1 + \rho v_2\boldsymbol{v_2}S_2.\end{aligned} \tag{12}$$

Si Q est constant, alors $v_1S_1 = v_2S_2$, donc on obtient :

$$\boldsymbol{R} = \rho Q(\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}) = \begin{bmatrix} \rho Q v_2 \cos\alpha \\ \rho Q(v_2 \sin\alpha + v_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 667 \\ 1155 \end{bmatrix} \text{N} \tag{13}$$

en supposant $v_1 = v_2$.

3. L'énergie cinétique verticale se transforme en énergie potentielle au point le plus haut du jet :

$$\frac{1}{2}\rho(v_2\sin\alpha)^2 = \rho g z_b. \tag{14}$$

Donc on trouve la hauteur maximale du jet :

$$z_b = \frac{\left(\frac{Q}{\pi r^2}\sin\alpha\right)^2}{2g} = 1,25 \text{ m}. \tag{15}$$

Exercice 5 Soit $d = 0,02$ m le diamètre intérieur du tube, $z_1 = 0,2$ m l'altitude du niveau de l'eau de la piscine par rapport au fond de la piscine et $z_2 = -0,23$ m l'altitude du bout du siphon par rapport au fond de la piscine. Nous appliquons le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 2 afin de déterminer la vitesse à la sortie du siphon ainsi que le débit :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2.$$

Sachant que $p_1 = p_2 = p_{atm}$ et $v_1 = 0$ m/s, on obtient :

$$v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = 2,90 \text{ m/s}$$

De plus on sait que :

$$Q = Sv_2 = \pi(d/2)^2 v_2 = \pi(0,02/2)^2 \times 2,90 = 9,11 \times 10^{-4} \text{ m}^3\text{s}^{-1}.$$

Exercice 6

1. On applique le théorème de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2,$$

avec $z_1 = z_2$, $p_1 = 0$, et $v_1 \approx 0$, $v_2 = 90$ km/h. On obtient :

$$p_2 = -\frac{1}{2}\rho v_2^2 = 0,5 \times 1,225 \times 25^2 = -0,382 \text{ kPa}.$$

À l'aide de l'équilibre des forces sur les deux colonnes du tube en U, on établit que :

$$p_2 + \rho_{water} g h = \rho_{oil} g \times 0,025.$$

Ainsi, on a

$$h = \frac{\rho_{oil} g 0,025 - p_2}{\rho_{water} g} = \frac{900 \times 9,81 \times 0,025 - (-382)}{1000 \times 9,81} = 0,0614 \text{ m}.$$

2. L'application du théorème de Bernoulli donne

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g z_3.$$

Avec $z_2 = z_3$ and $v_3 = 0$ on déduit

$$p_3 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 = 0,5 \cdot 1,225 \cdot 25^2 = 0,382 \text{ kPa}.$$